中部大学　工学部　電気システム工学科　　　後藤　英雄　2006/05/30

「オイラーの関係」の導出

次の関係をオイラーの関係といい、自然科学の分野では非常によく使われる。そこで、本関係を導出することにより、理解を深め応用の一助としたい。

$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$　（j : 虚数単位（数学では、i を使うが、電気の関連分野ではj を使う）、e : 自然対数の底（ネイピア数））

さて、任意の実数　a　,　x　によって表現される指数部が純虚数の複素数　$Z=a^{jx}$　について考える。複素数 Z の大きさ |Z| は、複素数の大きさの二乗が共役複素数の積で与えられることを利用すると、以下のように '1'であることが分かる。

$$|Z|=\sqrt{Z\overline{Z}}=\sqrt{a^{jx}a^{-jx}}=1$$

Zは、大きさが'1'の複素数であるから、

$Z=\cos\theta+j\sin\theta$　（　θ　: 実軸からの角度を表す）

と表すことができる。 ゆえに、

$$a^{jx}=\cos\theta+j\sin\theta$$

であることが分かる。 これ以降、上式の　a　、　x　、　θ　の関係を明らかにする。

両辺を　θ　で微分して、変形する。

$$j\ln(a)a^{jx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+j\cos\theta=j(\cos\theta+j\sin\theta)=j\,a^{jx}$$

簡単化すれば、

$$\ln(a)\frac{dx}{d\theta}=1$$

a　が定数である事を考慮して、微分方程式を解けば、

$\ln(a)x=\theta+Const$　（　$Const$　: 積分定数 ）

a^{jx}　を書き直して、まとめれば、

$$a^{jx}=e^{\ln(a)jx}=e^{j\ln(a)x}=e^{j(\theta+Const)}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$\theta=0$　でも、上式は成立するので、代入すれば、

$$e^{jConst}=\cos 0=1$$

ゆえに、　$e^{j(\theta+Const)}=e^{j\theta}e^{jConst}=e^{j\theta}$

よって、以下の関係が成立する。

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

この関係は電気関連分野に限らず、物理系、化学系をはじめとした自然科学系の分野では、非常によく使われる。
使えるようになっておくことをおすすめする。