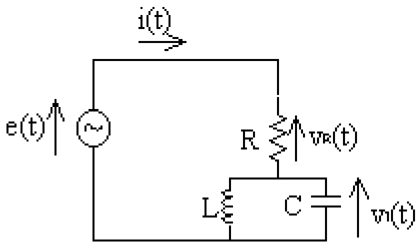
電気回路 練習問題 2004年6月－f

後藤



(f)

d に表される回路は、以下の素子定数を持つとする。

① $e(t)=100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=30[\mu F]$

② $e(t)=100\sqrt{2}\sin(120\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=30[\mu F]$

③ $e(t)=100\sqrt{2}\sin(120\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=10[\mu F]$

①～③の素子定数に対して以下の問いに答えよ。#必要な電圧・電流の記号は、各自で設定せよ。

1. 各素子と電源に流れる電流を求めよ。
2. 各素子に印加される電圧を求めよ。
3. 各素子と電源における瞬時電力を求めよ。
4. 電源から見た電流の位相を求めよ。
5. 電源から供給される電力の平均値を求めよ。
6. 電圧・電流のベクトル図を書け。

瞬時電圧・電流から解く

電源電圧を $e(t)=E\sin\omega t[V]$ とおく。

1. と2.

コイルとコンデンサにかかる電圧を $v_I(t)$ 、抵抗にかかる電圧を $v_R(t)$ とおく。
電源に流れる電流を $i(t)$ 、コイルに流れる電流を $i_L(t)$ 、コンデンサに流れる電流 $i_C(t)$ をとおく。それぞれの間には、以下の関係が成り立つ。

電圧に関して、 $e=v_R+v_I$

電流に関して、 $i=i_L+i_C$

抵抗Rに関して、 $v_R=Ri$

コイルに関して、 $v_I=L\dfrac{di_L}{dt}$

コンデンサ C に関して $i_C=C\dfrac{dv_I}{dt}$

すべての式(コイルに関する式を除く)について時間で微分してから、 i_C , i_L , $i(v_R)$ の順に代入して消去すれば、 v_I に関する以下の式が得られる。

$$\frac{de}{dt}=R\left(\frac{1}{L}v_I+C\frac{d^2v_I}{dt^2}\right)+\frac{dv_I}{dt}$$

ここで、 $v_I(t)=E_I\cos(\omega t+\theta)$ とおき、 $e(t)$ と $v_I(t)$ を関数として代入する。

$$E\cos(\omega t)=R(\frac{1}{\omega L}-\omega C)E_I\cos(\omega t+\theta)-E_I\sin(\omega t+\theta)$$

$$E\cos(\omega t)=\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}\,E_I\cos(\omega t+\theta+\phi)\ ,\ \ \phi=Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$

両辺を比べて、

$$E_I=\frac{E}{\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\ ,\ \ \theta=-\phi=-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$

コンデンサ、コイルにかかる電圧は、

$$v_I(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\cos\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)\right)[V]$$

コンデンサに流れる電流は、

$$i_C(t)=-\frac{\omega C E}{\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\sin\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)\right)[A]$$

コイルに流れる電流は、

$$i_L(t)=\frac{E}{\omega L\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\sin\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)\right)[A]$$

電源に流れる電流は、

$$i(t)=\frac{(\frac{1}{\omega L}-\omega C)E}{\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\sin\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)\right)[A]$$

抵抗にかかる電圧は、

$$v_R(t)=\frac{R(\frac{1}{\omega L}-\omega C)E}{\sqrt{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}}\sin\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)\right)[V]$$

3. 瞬時電力

抵抗Rについて、

$$P_R=v_R(t)i(t)=\frac{R(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2E^2}{R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1}\sin^2\left(\omega t-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)\right)[W]$$

$$=\frac{R(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2E^2}{2(R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1)}\left(1-\cos\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)\right)\right)[W]$$

コンデンサＣについて、

$$P_C=v_I(t)i_C(t)=-\frac{\omega CE^2}{2(R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1)}\left(\sin\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)\right)\right)[W]$$

コイルLについて、

$$P_L=v_I(t)i_L(t)=\frac{E^2}{2\omega L(R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1)}\left(\sin\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)\right)\right)[W]$$

電源について、 $P_E(t)=P_R(t)+P_C(t)+P_L(t)$

4. 電源と電流の式を比較して、

電流は電圧に対して $-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)$ 進む。

（電流は電圧に対して $Tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)$ 遅れる。）

5. 電力の平均値

3. を参考にして、

$$\frac{R(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2E^2}{2(R^2(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2+1)}[W]$$

ベクトル記号法で解く

1．電源電圧を **E**、抵抗の電圧を $\mathbf{V_R}$、コンデンサ（コイル）の電圧を $\mathbf{V_I}$、電流をそれぞれ $\mathbf{I_C}$,$\mathbf{I_L}$,**I** とする。

電源電圧を基準にすれば、 $\boldsymbol{E}=E'$

次の式が成り立つ。

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V_R}+\boldsymbol{V_I}$ 、 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I_C}+\boldsymbol{I_L}$

抵抗 R で、 $\boldsymbol{V_R}=R\boldsymbol{I}$

コンデンサ C で、 $\boldsymbol{I_C}=j\omega C\boldsymbol{V_I}$

コイルLで、 $\boldsymbol{I_L}=\dfrac{1}{j\omega L}\boldsymbol{V_I}$

これらの式を整理すれば、

$$\boldsymbol{E}=R\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\right)\boldsymbol{V_I}+\boldsymbol{V_I}=\left(1+R\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\right)\right)\boldsymbol{V_I}$$

$$\boldsymbol{V_I}=\frac{1}{1+R\left(j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L}\right)}\boldsymbol{E}=\frac{j\omega L}{j\omega L+R(1-\omega^2 LC)}\boldsymbol{E}=\frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2(1-\omega^2LC)^2}}\exp\left(j\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right)\boldsymbol{E}$$

ただし、 $\phi=Tan^{-1}\left(\dfrac{\omega L}{R(1-\omega^2LC)}\right)$

コンデンサ C で、

$$\boldsymbol{I_C}=j\omega C\boldsymbol{V_I}=-\frac{\omega^2LC}{j\omega L+R(1-\omega^2LC)}\boldsymbol{E}=-\frac{\omega^2LC}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2(1-\omega^2LC)^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$$

コイルLで、 $\boldsymbol{I_L}=\dfrac{1}{j\omega L}\boldsymbol{V_I}=\dfrac{1}{j\omega L+R(1-\omega^2LC)}\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2(1-\omega^2LC)^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$

電源に流れる電流は、

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I_C}+\boldsymbol{I_L}=\frac{1-\omega^2LC}{j\omega L+R(1-\omega^2LC)}\boldsymbol{E}=\frac{1}{R+j\dfrac{\omega L}{1-\omega^2LC}}\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2LC}\right)^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$$

（ 抵抗 R で、 $\boldsymbol{V_R}=R\boldsymbol{I}=\dfrac{R(1-\omega^2LC)}{j\omega L+R(1-\omega^2LC)}\boldsymbol{E}$ ）

この式は、電流が、電圧の振幅を $\dfrac{1}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2LC}\right)^2}}$ 倍し、電圧の位相を ϕ 遅らせることによって与えられることを示す。ゆえに、 $e(t)=E\sin\omega t[V]$ であれば、

$$i(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2LC}\right)^2}}\sin(\omega t-\phi)[A]$$

（変形すれば、瞬時電圧・電流を使って求めた式と一致している。）

同様に考えて、

抵抗にかかる電圧は、 $v_R(t)=Ri(t)=\dfrac{RE}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}}\sin(\omega t-\phi)[V]$

コイル(コンデンサ)にかかる電圧は、 $v_I(t)=\dfrac{\omega LE}{\sqrt{\omega^2 L^2+R^2(1-\omega^2 LC)^2}}\cos(\omega t-\phi)[V]$

2. 省略(“瞬時電流・電圧で解く 2. ”を参考にする)

3. 省略(“瞬時電流・電圧で解く 3. ”を参考にする)

4. 省略(1. を参考にする)

＃補足

電源での電流と電圧の関係は、回路が並直列になっていることから、合成インピーダンスを求めても得ることができる。合成インピーダンスは、

$$\boldsymbol{Z}=R+\frac{1}{j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L}}$$

であるので、

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}$$

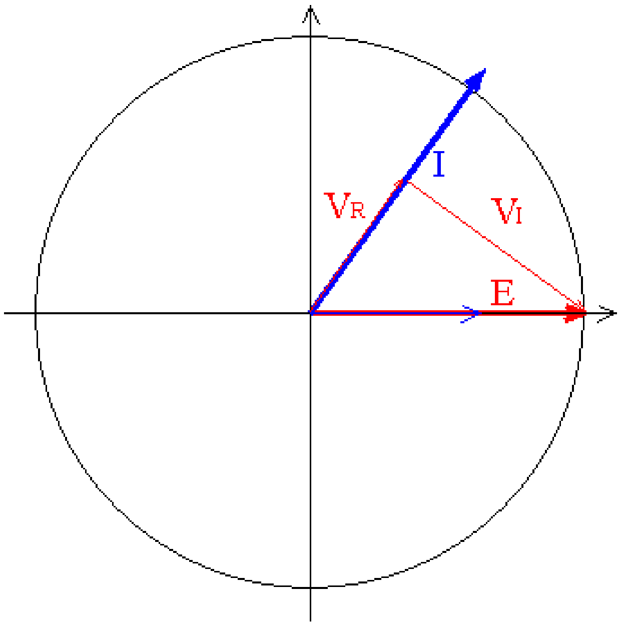
代入し、変形すれば、電流が得られる。

5．ベクトル記号法では、電力 **P** は、 $\boldsymbol{P}=\bar{V}I$ で、与えられる。実部が電力の時間平均（有効電力）、虚部が無効電力を与える。

$$\boldsymbol{P}=\bar{\boldsymbol{E}}I=\bar{\boldsymbol{E}}\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$$

実部を求めると $\dfrac{|\boldsymbol{E}|^2}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}}\cos\phi[W]$

6．ベクトル図



$1-\omega^2 LC<0$

数値として、計算する。

①の場合、

1． $i_L(t)=1.05\sqrt{2}\sin(100\pi t-1.45)[A]$, $i_C(t)=-0.94\sqrt{2}\sin(100\pi t-1.45)[A]$
$i(t)=-0.12\sqrt{2}\sin(100\pi t-1.45)[A]$

2． $v_R(t)=11.8\sqrt{2}\sin(100\pi t-1.45)[V]$
$v_I(t)=99.3\sqrt{2}\cos(100\pi t-1.45)[V]$

3． $P_R(t)=1.46(1-\cos(200\pi t-2.9))[W]$, $P_L(t)=104\sin(200\pi t-2.9)[W]$

4． 0.12

5． 1.46W

②の場合

1． $i_L(t)=0.85\sqrt{2}\sin(120\pi t+1.33)[A]$, $i_C(t)=-109.6\sqrt{2}\sin(120\pi t+1.33)[A]$
$i(t)=-0.24\sqrt{2}\sin(120\pi t+1.33)[A]$

2． $v_R(t)=-24\sqrt{2}\sin(120\pi t+1.33)[V]$
$v_I(t)=97\sqrt{2}\cos(120\pi t+1.33)[V]$

3． $P_R(t)=5.76(1-\cos(240\pi t+2.66))[W]$, $P_L(t)=82.5\sin(240\pi t+2.66)[W]$

4． 0.23

5． 5.76W

③の場合は、省略