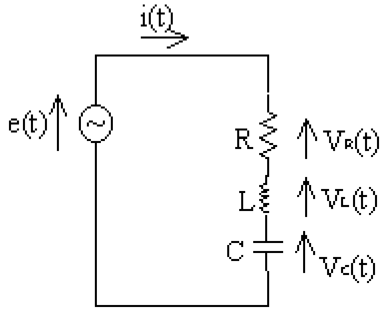
電気回路　練習問題　2004年6月－f

後藤



(g)

g に表される回路は、以下の素子定数を持つとする。

① $e(t)=100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=30[\mu F]$

② $e(t)=100\sqrt{2}\sin(120\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=30[\mu F]$

③ $e(t)=100\sqrt{2}\sin(120\pi t)[V], R=100[\Omega], L=0.3[H], C=10[\mu F]$

①～③の素子定数に対して以下の問いに答えよ。#必要な電圧・電流の記号は、各自で設定せよ。

1．各素子と電源に流れる電流を求めよ。
2．各素子に印加される電圧を求めよ。
3．各素子と電源における瞬時電力を求めよ。
4．電源から見た電流の位相を求めよ。
5．電源から供給される電力の平均値を求めよ。
6．電圧・電流のベクトル図を書け。

瞬時電圧・電流から解く

電源電圧を　$e(t)=E\sin\omega t[V]$　電流　$i=I\sin(\omega t+\theta)[A]$　とおく。

1．2．

抵抗Rに発生する電圧は、　$v_R(t)=Ri=RI\sin(\omega t+\theta)[V]$

コンデンサ C に発生する電圧は、　$v_C(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt=-\frac{I}{\omega C}\cos(\omega t+\theta)$

コイル L に発生する電圧は、　$v_L(t)=L\frac{di}{dt}=\omega LI\cos(\omega t+\theta)$

キルヒホッフの電圧則により、

$$e(t)=E\sin\omega t=v_R+v_C+v_L=RI\sin(\omega t+\theta)+(\omega L-\frac{1}{\omega C})I\cos(\omega t+\theta)$$

$$=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}\,I\sin(\omega t+\theta+\phi)$$

ただし、　$\phi=Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

式を比較して、

$$I=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}[A],\quad \theta=-\phi=-Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$i(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t-\phi)[A]$$

コンデンサにかかる電圧は、

$$v_C(t)=-\frac{E}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t-\phi)[V]$$

コイルにかかる電圧は、

$$v_L(t)=\omega L\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t-\phi)[V]$$

抵抗にかかる電圧は、

$$v_R(t)=R\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t-\phi)[V]$$

３．瞬時電力

抵抗Rについて、

$$P_R=v_R(t)i(t)=\frac{RE^2}{\left(R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2\right)}\sin(\omega t-\phi)[W]$$

$$=\frac{RE^2}{2\left(R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2\right)}\left(1-\cos\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)\right)[W]$$

コンデンサＣについて、

$$P_C=v_I(t)i_C(t)=-\frac{\omega CE^2}{2\left(R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2\right)}\left(\sin\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)\right)[W]$$

コイルLについて、

$$P_L=v_I(t)i_L(t)=\frac{E^2}{2\omega L\left(R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2\right)}\left(\sin\left(2\omega t-2Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)\right)[W]$$

電源について、 $P_E(t)=P_R(t)+P_C(t)+P_L(t)$

４．電源と電流の式を比較して、

電流は電圧に対して $Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$ 遅れる。

（電流は電圧に対して $Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$ 進む。）

５．電力の平均値

３．を参考にして、 $\frac{RE^2}{2\left(R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2\right)}[W]$

ベクトル記号法で解く

1．電源電圧を **E**、抵抗の電圧を **V**$_{\mathbf{R}}$、コンデンサの電圧を **V**$_{\mathbf{C}}$、コイルの電圧を **V**$_{\mathbf{L}}$、電流を **I** とする。

電源電圧を基準にすれば、 $\boldsymbol{E}=E'$

次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V_R}+\boldsymbol{V_L}+\boldsymbol{V_C}$$

抵抗 R で、 $\boldsymbol{V_R}=R\boldsymbol{I}$

コンデンサ C で、 $\boldsymbol{V_C}=\frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}$

コイルLで、 $\boldsymbol{V_L}=j\omega L\boldsymbol{I}$

これらの式を整理すれば、

$$\boldsymbol{E}=R\boldsymbol{I}+j\omega L\boldsymbol{I}+\frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}=(R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C}))\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{I}=\frac{1}{R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$$

ただし、 $\phi=Tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

この式は、電流が、電圧の振幅を $\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$ 倍し、電圧の位相を ϕ 遅らせることによって与えられることを示す。

ゆえに、 $e(t)=E\sin\omega t[V]$ であれば、 $i(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t-\phi)[A]$

コンデンサ C で、 $\boldsymbol{V_C}=\frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}=\frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\exp(-j\phi-j\frac{\pi}{2})\boldsymbol{E}$

コイルLで、 $\boldsymbol{V_L}=j\omega L\boldsymbol{I}=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\exp(-j\phi+j\frac{\pi}{2})\boldsymbol{E}$

抵抗 R で、 $\boldsymbol{V_R}=R\boldsymbol{I}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$

同様に考えて、

抵抗にかかる電圧は、 $v_R(t)=Ri(t)=R\dfrac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t-\phi)[V]$

コイルにかかる電圧は、 $v_L(t)=\dfrac{\omega L E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t-\phi)[V]$

コンデンサにかかる電圧は、 $v_C(t)=-\dfrac{E}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t-\phi)[V]$

2. 省略(“瞬時電流・電圧で解く 2. ”を参考にする)

3. 省略(“瞬時電流・電圧で解く 3. ”を参考にする)

4. 省略(1. を参考にする)

＃補足

電源での電流と電圧の関係は、回路が並直列になっていることから、合成インピーダンスを求めても得ることができる。合成インピーダンスは、

$$\boldsymbol{Z}=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}$$

であるので、

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}$$

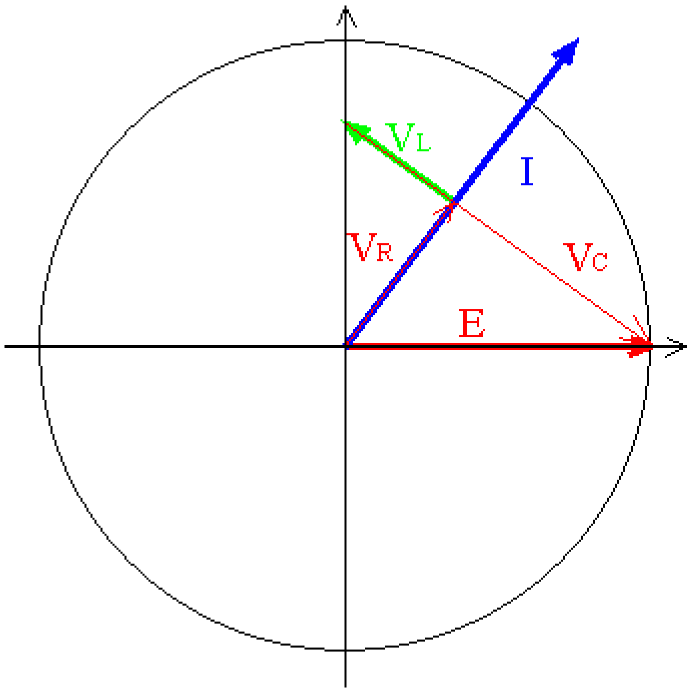
へ代入し、変形すれば、電流が得られる。

5. ベクトル記号法では、電力 **P** は、 $\boldsymbol{P}=\bar{\boldsymbol{V}}\,I$ で、与えられる。実部が電力の時間平均(有効電力)、虚部が無効電力を与える。

$$\boldsymbol{P}=\bar{\boldsymbol{E}}\,I=\bar{\boldsymbol{E}}\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\exp(-j\phi)\boldsymbol{E}$$

実部を求めると $\dfrac{|\boldsymbol{E}|^2}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}\cos\phi[W]$

6．ベクトル図



$1-\omega^2 LC<0$

数値として、計算する。

①の場合、

1．　$i(t)=0.99\sqrt{2}\sin(100\pi t+0.12)[A]$

2．　$v_R(t)=99.3\sqrt{2}\sin(100\pi t+0.12)[V]$

$v_L(t)=93.3\sqrt{2}\cos(100\pi t+0.12)[V]$

$v_C(t)=-105\sqrt{2}\cos(100\pi t+0.12)[V]$

3．　$P_R(t)=98.3(1-\cos(200\pi t+0.24))[W]$，$P_L(t)=92.4\sin(200\pi t+0.24)[W]$

4．0.99

5．98.3W

②の場合

1．　$i(t)=0.97\sqrt{2}\sin(120\pi t-0.24)[A]$

2．　$v_R(t)=97\sqrt{2}\sin(120\pi t-0.24)[V]$

$v_L(t)=110\sqrt{2}\cos(120\pi t-0.24)[V]$

$v_C(t)=-85.7\sqrt{2}\cos(120\pi t-0.24)[V]$

3．　$P_R(t)=94(1-\cos(240\pi t-0.48))[W]$，$P_L(t)=107\sin(240\pi t-0.48)[W]$

4．0.97

5．94W

③の場合は、省略