

4. キルヒホッフの電流則

任意の点で、その点に流入する電流の和とその点から出る電流の和は等しい。

1. 図10-1で、BからDへ向かう電流をIとする。点Dと点Aで、電流が満たすべき式を表せ。

点D 流入電流:I、 流出電流: I_1+I_2 、両者は等しいので: $I=I_1+I_2$

点A 流入電流: I_1+I_2 、 流出電流:I、両者は等しいので: $I=I_1+I_2$ (1-1)

キルヒホッフの電圧則より、

$$E=V_1=V_2 \tag{1-2}$$

オームの法則より、

$$V_1=R_1 I_1 \tag{1-3}$$

$$V_2=R_2 I_2 \tag{1-4}$$

(1-2)と(1-3)より、 $I_1=\frac{E}{R_1}$, (1-2)と(1-4)より、 $I_2=\frac{E}{R_2}$

これらの式を(1-1)に代入すれば、 $I=I_1+I_2=\frac{E}{R_1}+\frac{E}{R_2}$ [A]

2. 図10-2で、DからBへ向かう電流をIとする。点Dと点Aで、電流が満たすべき式を表せ。

点D 流入電流:0、 流出電流: $I+I_1+I_2$ 、両者は等しいので: $I+I_1+I_2=0$

点A 流入電流: $I+I_1+I_2$ 、 流出電流:0、両者は等しいので: $I+I_1+I_2=0$ (2-1)

キルヒホッフの電圧則より、

$$E=V_1=V_2 \tag{2-2}$$

オームの法則より、

$$V_1=R_1 I_1 \tag{2-3}$$

$$V_2=R_2 I_2 \tag{2-4}$$

(2-2)と(2-3)より、 $I_1=\frac{E}{R_1}$, (2-2)と(2-4)より、 $I_2=\frac{E}{R_2}$

これらの式を(2-1)に代入すれば、 $I=-(I_1+I_2)=-\left(\frac{E}{R_1}+\frac{E}{R_2}\right)$ [A]

1. と2. では、与えた電流の方向が異なるが、符号が異なっているので同じ電流を与えることが分かる。

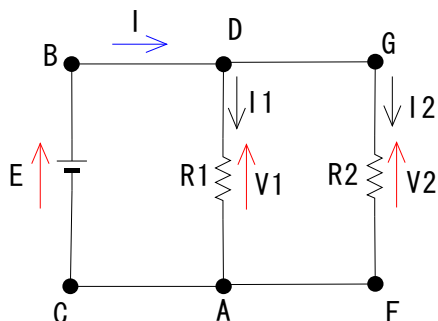


図10-1

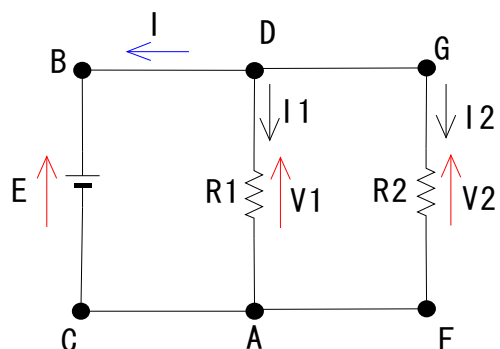


図10-2

3. 図11で、点D、点G、点A、点Fそれぞれについて、電流が満たすべき式を表せ。

・図11-1について: I_0, I_4 を導入して

点D: $I = I_1 + I_0$ 点G: $I_0 = I_2 + I_3$ 点A: $I = I_1 + I_4$ 点F: $I_4 = I_2 + I_3$

・図11-2のように示す緑の領域に流入する電流と流出する電流についても電流則が成り立つ。
点Dと点G(点Aと点F)は、ひとまとめに考えて、 $I = I_1 + I_2 + I_3$

4. 図11で、一つの抵抗で同じ電流をIを与える抵抗値RをR1~R3で表せ。

前ページと同様に解いて、 $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}$ [A]

一般にn個の抵抗が並列に接続されているとき、合成抵抗はどのように与えられるか？

並列の抵抗を増やしても同様の考え方で、電流を求めることができる。n個の抵抗が並列につながっている場合には、次式で与えられる。

$$I = \sum_n I_n = \sum_n \frac{E}{R_n} = E \sum_n \frac{1}{R_n} \text{ [A]}$$

合成抵抗をR[Ω]とおけば、 $I = \frac{E}{R} = E \sum_n \frac{1}{R_n}$ であるから

$$\frac{1}{R} = \sum_n \frac{1}{R_n}$$

合成抵抗の逆数は、抵抗の逆数の和で与えられる。

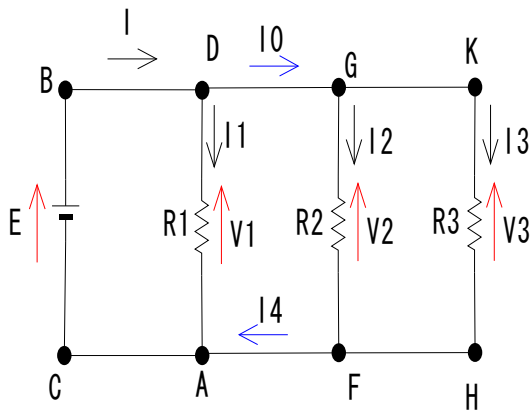


図11-1

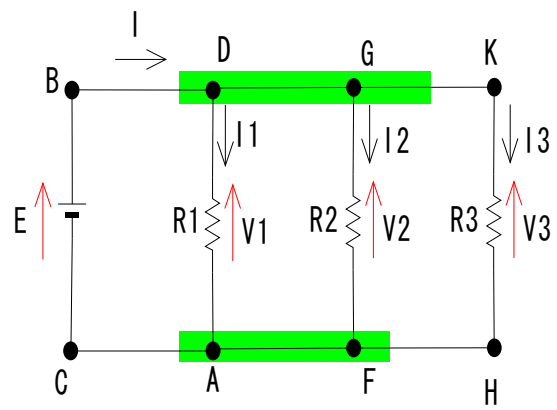


図11-2

5. 図12で、点Aと点Cそれぞれにおいて、キルヒホッフの電流則を式で表せ。

点A: $I = I_1 + I_2$ 点B: $I_3 = I_1 + I_2$

6. I1~I3, Iには、どのような関係があるか。

同じ線上にあるので、 $I = I_3$

7. AC間の電位をADC, AFG, ABCの経路で表せ。

ADC: V_1 AFG: V_2 ABC: $E - V_3$

互いに等しい電位差(すべてAC間の電位差を表す)であるので、

$V_1 = V_2 = E - V_3$

8. 5~7の式を利用して、I1~I3, IをEと抵抗によって表せ。

7. で得た式をオームの法則を利用して電流の式に書き直せば、

$R_1 I_1 = R_2 I_2 = E - R_3 I_3$

この式から、 $I_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} I_3$, $I_2 = \frac{E}{R_2} - \frac{R_3}{R_2} I_3$ であるので、5. で得た式に代入すれば、

$$I_3 = I = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)E}{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R_3} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \quad [\text{A}]$$

並列抵抗の電流は、抵抗の逆数で比例配分されるので、

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I = \frac{\frac{1}{R_1} E}{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R_3} \quad [\text{A}], \quad I_2 = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I = \frac{\frac{1}{R_2} E}{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R_3} \quad [\text{A}]$$

直並列回路であるから、電源からみた合成抵抗R[Ω]は、

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

これを利用して、電流Iを求めることもできる。

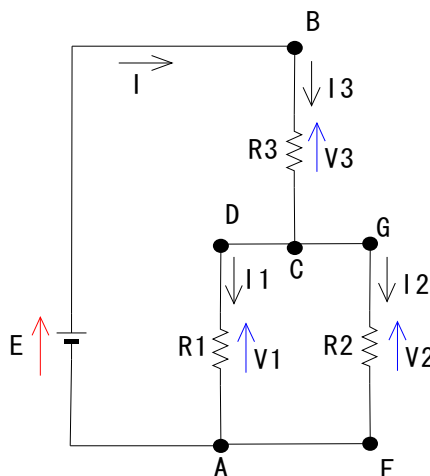


図12

9. 図13で、 $I_0 \sim I_2$ 、 I を E と抵抗によって表せ。

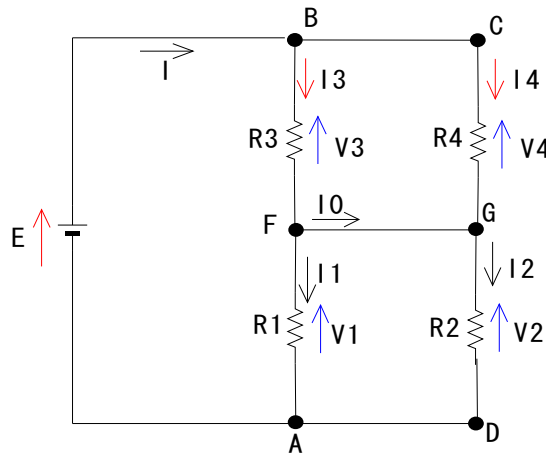


図13

キルヒホッフの電圧則とオームの法則により、

$$V_3 = V_4 = R_3 I_3 = R_4 I_4$$

キルヒホッフの電流則により、 $I = I_3 + I_4$ である。上の式を代入すれば、

$$I = \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3}{R_4} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) V_3$$

同様に考えて、

キルヒホッフの電圧則とオームの法則により、

$$V_1 = V_2 = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

キルヒホッフの電流則により、 $I = I_1 + I_2$ である。上の式を代入すれば、

$$I = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_1$$

キルヒホッフの電圧則により得られる式に、先に求めた式を(変形して)代入する。

$$E = V_1 + V_3 = \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \right) I$$

$$I = \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \quad [\text{A}]$$

並列抵抗では、電流は抵抗の逆数で比例配分されるので、

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \quad [\text{A}], \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \quad [\text{A}]$$

同様にして I_3 を求めれば、以下のようなになる。

$$I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I = \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E$$

キルヒホッフの電流則を点Fに適用すれば、 $I_3 = I_0 + I_1$ であるから、

$$I_0 = I_3 - I_1 = \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \quad [\text{A}]$$

図13は、直並列回路であるから、合成抵抗Rを求めれば、

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

電流Iは、 $I = \frac{E}{R} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \quad [\text{A}]$ で求めることもできる。

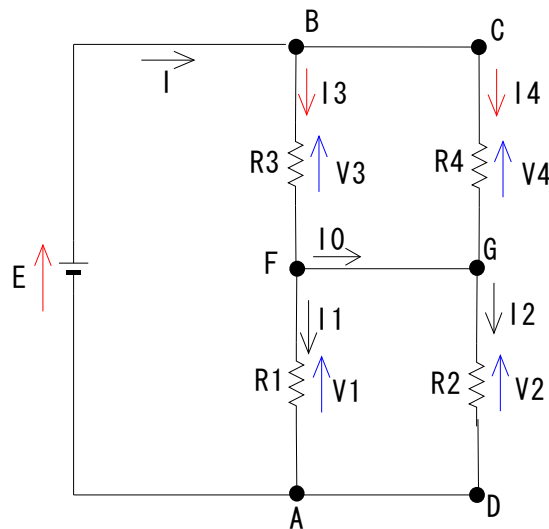


図13

5. 抵抗回路の電力

回路素子において、電流の積は電力(単位時間当たりのエネルギー)を与える。電圧と電流の向きが同じ時、その素子は回路にエネルギーを供給する。互いに逆向きの時、素子は回路よりエネルギーを受け取る。

1. 図12で、 $R_1 \sim R_3$ と E で消費(供給)される電力を求めよ。

答

それぞれの素子に流れる電流は、次のように与えられる。電力 P [W] が素子にかかる電圧 V と電流 I の積

で与えられることを考えれば、抵抗で消費される電力 P は、 $P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$ となる。

それぞれの素子の電力は、

$$R1: P_1 = V_1 I_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \left(\frac{\frac{1}{R_1} E}{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) R_3} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R2: P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = R_2 \left(\frac{\frac{1}{R_2} E}{1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) R_3} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R3: P_3 = V_3 I_3 = R_3 I_3^2 = R_3 \left(\frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$\text{電源: } P = E I = \frac{E^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \quad [\text{W}]$$

$P = P_1 + P_2 + P_3$ になっている。

2. 図13で、R1～R4とEで消費(供給)される電力を求めよ。

答

それぞれの素子に流れる電流は、次のように与えられる。電力 P[W]が素子にかかる電圧 V と電流 I の積で与えられることを考えれば、抵抗で消費される電力 P は、 $P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$ となる。

それぞれの素子の電力は、

$$R1: P_1 = V_1 I_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \left(\frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R2: P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = R_2 \left(\frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R3: P_3 = V_3 I_3 = R_3 I_3^2 = R_3 \left(\frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R4: P_4 = V_4 I_4 = R_4 I_4^2 = R_4 \left(\frac{\frac{R_3}{R_3 + R_4}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} E \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$\text{電源: } P = EI = \frac{E^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \quad [\text{W}]$$

$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ になっている。

3. 図8で、R1,R2,E1,E2 で消費(供給)される電力を求めよ。

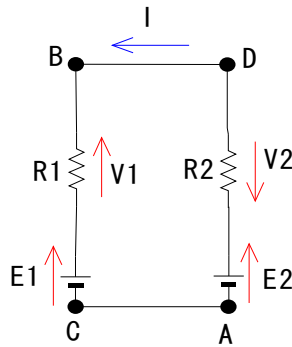


図8

回路に流れる電流 I は、 $I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}$ で与えられるので、電力は、

$$R1: P_{R1} = R_1 I^2 = R_1 \left(\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$R2: P_{R2} = R_2 I^2 = R_2 \left(\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \quad [\text{W}]$$

$$E1: P_{E1} = E_1 I = E_1 \left(\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} \right) \quad [\text{W}] \text{電力を受け取る。 (電流と電圧の向きが逆)}$$

$$E2: P_{E2} = E_2 I = E_2 \left(\frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} \right) \quad [\text{W}] \text{電力を供給する。 (電流と電圧の向きが同じ)}$$

4. 図9で、 $R_1 = 1 [\Omega]$, $R_2 = 4 [\Omega]$, $E_1 = 10 [V]$, $E_2 = 5 [V]$ のとき、 R_1, R_2, E_1, E_2 で消費(供給)される電力を求めよ。

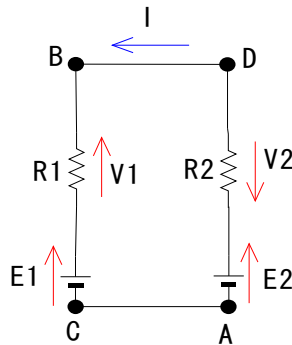


図9

前ページと同じ回路であるから、結果をそのまま利用する。

回路に流れる電流 I は、 $I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = -1$ [A] となる。電力は、

$$R1: P_{R1} = R_1 I^2 = 1 \text{ [W]}$$

$$R2: P_{R2} = R_2 I^2 = 4 \text{ [W]}$$

$$E1: P_{E1} = E_1 I = -10 \text{ [W]} \text{ 電力を受け取る。 (電流と電圧の向きが逆)}$$

$$E2: P_{E2} = E_2 I = -5 \text{ [W]} \text{ 電力を供給する。 (電流と電圧の向きが同じ)}$$

E_1 は、電流と電圧の向きを逆にして解いているので、受け取る電力を計算している。実際の電力が負である(-10W)ということは電力を供給していることに相当する。

E_2 は、電流と電圧の向きを同じにして解いているので、供給する電力を計算している。実際の電力が負である(-5W)ということは電力を受け取っていることに相当する。

抵抗は電力を受け取る素子であるから、電流と電圧を逆向きを選んで電力を受け取るとき正の値になるようにしている。

上の問題で、 E_1 と E_2 の値をいろいろに変えて、電力を受け取るということと、電力を供給するということについて理解を深めておくとよい。