中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

6. 総合問題
図14－17で、各素子に流れる電流と各素子で消費（供給）される電力を求めよ。

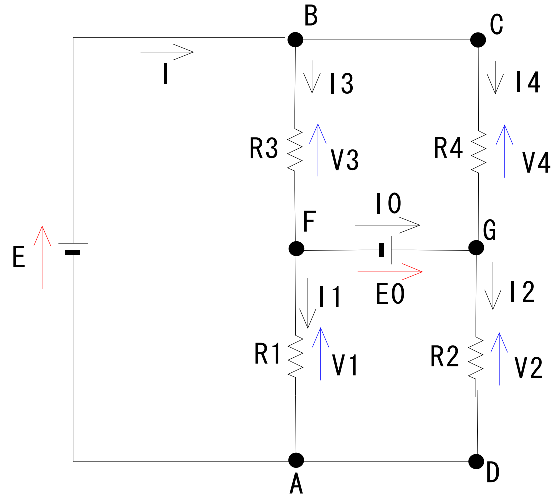

図14－1

キルヒホッフの電圧則とオームの法則により、

$$V_3 = V_4 + E_0 = R_3 I_3 = R_4 I_4 + E_0$$

キルヒホッフの電流則により、　$I = I_3 + I_4$　である。上の式を代入すれば、

$$I = \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3 - E_0}{R_4} = (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}) V_3 - \frac{E_0}{R_4}$$

同様に考えて、

キルヒホッフの電圧則とオームの法則により、

$$V_1 = V_2 - E_0 = R_1 I_1 = R_2 I_2 - E_0$$

キルヒホッフの電流則により、　$I = I_1 + I_2$　である。上の式を代入すれば、

$$I = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 + E_0}{R_2} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) V_1 + \frac{E_0}{R_2}$$

キルヒホッフの電圧則により得られる式に、先に求めた式を（変形して）代入する。

$$E = V_1 + V_3 = \frac{I - \frac{E_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{I + \frac{E_0}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \right) I - \frac{\frac{E_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + \frac{\frac{E_0}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

$$E = (\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}) I - (\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}) E_0$$

$$I = \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} (E + (\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}) E_0) = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) E + (R_1 R_4 - R_2 R_3) E_0}{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2} \quad [\mathrm{A}]$$

中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

先に求めた式を変形して、

$$V_1=\frac{I-\dfrac{E_0}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}=\frac{R_1R_2I-R_1E_0}{R_1+R_2}=R_1\frac{R_2(R_3+R_4)E-\dfrac{(R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_2^2R_3)}{R_1+R_2}E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}$$

$$V_1=R_1\frac{R_2(R_3+R_4)E-(R_2R_3+R_3R_4)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{V}]$$

$$I_1=\frac{V_1}{R_1}=\frac{R_2(R_3+R_4)E-R_3(R_2+R_4)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I_2=I-I_1=\frac{R_1(R_3+R_4)E+R_4(R_1+R_3)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{A}]$$

同じ手続きにより、

$$V_3=\frac{I+\dfrac{E_0}{R_4}}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}=\frac{R_3R_4I+R_3E_0}{R_3+R_4}=R_3\frac{R_4(R_1+R_2)E+\dfrac{(R_1R_2R_3+R_2R_1R_4+R_3R_4R_1+R_1^2R_4)}{R_3+R_4}E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}$$

$$V_3=R_3\frac{R_4(R_1+R_2)E+(R_1R_2+R_1R_4)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{V}]$$

$$I_3=\frac{V_3}{R_3}=\frac{R_4(R_1+R_2)E+R_1(R_2+R_4)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I_4=I-I_3=\frac{R_3(R_1+R_2)E-R_2(R_1+R_3)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{A}]$$

キルヒホッフの電流則を点Fに適用すれば、 $I_3=I_0+I_1$ であるから、

$$I_0=I_3-I_1=\frac{(R_1R_4-R_2R_3)E+(R_2+R_4)(R_1+R_3)E_0}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2}\quad[\mathrm{A}]$$

i 番目の抵抗で消費される電力 P_i は、上で得た電流によって次のように表される。

$P_i=R_iI_i^2$ [W] (i=1,2,3,4)

中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

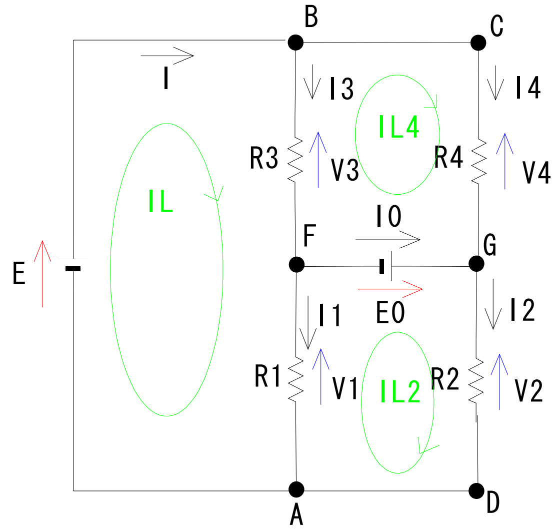

図14－2

別解

キルヒホッフの電流則は、素子に流れる電流がループ電流の重ね合わせで表現されることを表す。図14－2のようにループ電流を与えて回路を解く。

素子の電流をループ電流で表す。

$I=I_L$, $I_1=I_L-I_{L2}$, $I_2=I_{L2}$, $I_3=I_L-I_{L4}$, $I_4=I_{L4}$, $I_0=I_{L2}-I_{L4}$

設定したループ電流に沿ってキルヒホッフの電圧則を適用する。

IL:　$0=E-V_3-V_1=E-R_3(I_L-I_{L4})-R_1(I_L-I_{L2})=-(R_1+R_3)I_L+R_1I_{L2}+R_3I_{L4}+E$

IL2:　$0=V_1+E_0-V_2=R_1(I_L-I_{L2})-R_2I_{L2}+E_0=R_1I_L-(R_1+R_2)I_{L2}+E_0$

IL4:　$0=V_3-V_4-E_0=R_3(I_L-I_{L4})-R_4I_{L4}-E_0=R_3I_L-(R_3+R_4)I_{L4}-E_0$

書き直せば、

$(R_1+R_3)I_L-R_1I_{L2}-R_3I_{L4}=E$

$-R_1I_L+(R_1+R_2)I_{L2}=E_0$

$-R_3I_L+(R_3+R_4)I_{L4}=-E_0$

I_L, I_{L2}, I_{L4} に関する連立一次方程式を解けば、電流が得られる。

書き直して行列であらわせば、

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_1+R_2 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_3+R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ E_0 \\ -E_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_1+R_2 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_3+R_4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E \\ E_0 \\ -E_0 \end{pmatrix}$$

中部大学 電気システム工学科 後藤 英雄

$$\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} (R_1+R_2)(R_3+R_4) & R_1(R_3+R_4) & R_3(R_1+R_2) \\ R_1(R_3+R_4) & (R_1+R_3)(R_3+R_4)-R_3^2 & R_1 R_3 \\ R_3(R_1+R_2) & R_1 R_3 & (R_1+R_3)(R_1+R_2)-R_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ E_0 \\ -E_0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_1+R_2 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_3+R_4 \end{vmatrix}}$$

成分毎に表せば、

$$I_L = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)E+(R_1 R_4 - R_2 R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_{L2} = \frac{R_1(R_3+R_4)E + R_4(R_1+R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_{L4} = \frac{R_3(R_1+R_2)E - R_2(R_1+R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

最初の式に代入して、

$$I = I_L = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)E+(R_1 R_4 - R_2 R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_1 = I_L - I_{L2} = \frac{R_2(R_3+R_4)E - R_3(R_2+R_4)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_2 = I_{L2} = \frac{R_1(R_3+R_4)E + R_4(R_1+R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_3 = I_L - I_{L4} = \frac{R_4(R_1+R_2)E + R_1(R_2+R_4)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_4 = I_{L4} = \frac{R_3(R_1+R_2)E - R_2(R_1+R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

$$I_0 = I_{L2} - I_{L4} = \frac{(R_1 R_4 - R_2 R_3)E + (R_2+R_4)(R_1+R_3)E_0}{R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

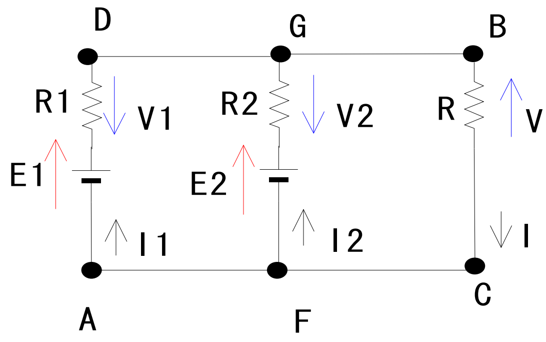

図15

キルヒホッフの電圧則とオームの法則より、

$$V=E_1-V_1=E_2-V_2=E_1-R_1I_1=E_2-R_2I_2=RI$$

変形して、

$$I_1=\frac{E_1-V}{R_1}\quad,\quad I_2=\frac{E_2-V}{R_2}\quad,\quad I=\frac{V}{R}$$

キルヒホッフの電流則より、

$$I=I_1+I_2$$

先ほどの式を代入して、

$$\frac{V}{R}=\frac{E_1-V}{R_1}+\frac{E_2-V}{R_2}$$

V について解けて、

$$V=\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{V}]$$

$$I_1=\frac{E_1-V}{R_1}=\frac{1}{R_1}\frac{(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2})E_1-\frac{1}{R_2}E_2}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I_2=\frac{E_2-V}{R_2}=\frac{1}{R_2}\frac{(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1})E_2-\frac{1}{R_1}E_1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I=\frac{V}{R}=\frac{1}{R}\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

抵抗で消費される電力は、それぞれ

R:　$P=RI^2$　[W]　　R1:　$P_1=R_1I_1^2$　[W]　　R2:　$P_2=R_2I_2^2$　[W]で与えられる。

中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

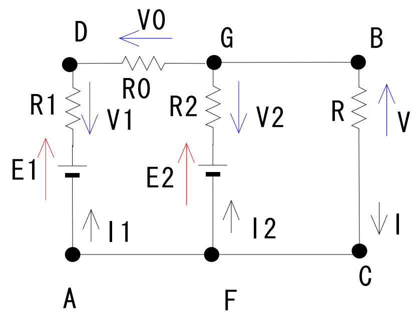

図16

この回路は、R0とR1を一つの抵抗R1'と見なせば、図15と同じ回路になる。
キルヒホッフの電圧則とオームの法則より、

$$V=E_1-(V_1+V_0)=E_2-V_2=E_1-(R_1+R_0)I_1=E_2-R_2I_2=RI$$

変形して、

$$I_1=\frac{E_1-V}{R_0+R_1}\quad,\quad I_2=\frac{E_2-V}{R_2}\quad,\quad I=\frac{V}{R}$$

キルヒホッフの電流則より、

$$I=I_1+I_2$$

先ほどの式を代入して、

$$\frac{V}{R}=\frac{E_1-V}{R_0+R_1}+\frac{E_2-V}{R_2}$$

Vについて解けて、

$$V=\frac{\dfrac{E_1}{R_0+R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_0+R_1}+\dfrac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{V}]$$

$$I_1=\frac{E_1-V}{R_0+R_1}=\frac{1}{R_0+R_1}\frac{(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_2})E_1-\dfrac{1}{R_2}E_2}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_0+R_1}+\dfrac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I_2=\frac{E_2-V}{R_2}=\frac{1}{R_2}\frac{(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_0+R_1})E_2-\dfrac{1}{R_1}E_1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_0+R_1}+\dfrac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

$$I=\frac{V}{R}=\frac{1}{R}\frac{\dfrac{E_1}{R_0+R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_0+R_1}+\dfrac{1}{R_2}}\quad[\mathrm{A}]$$

抵抗で消費される電力は、それぞれ
R:　$P=RI^2$　[W]　　R0:　$P_0=R_0I_1^2$　[W]　　R1:　$P_1=R_1I_1^2$　[W]　　R2:　$P_2=R_2I_2^2$　[W]
で与えられる。

中部大学　電気システム工学科　後藤 英雄

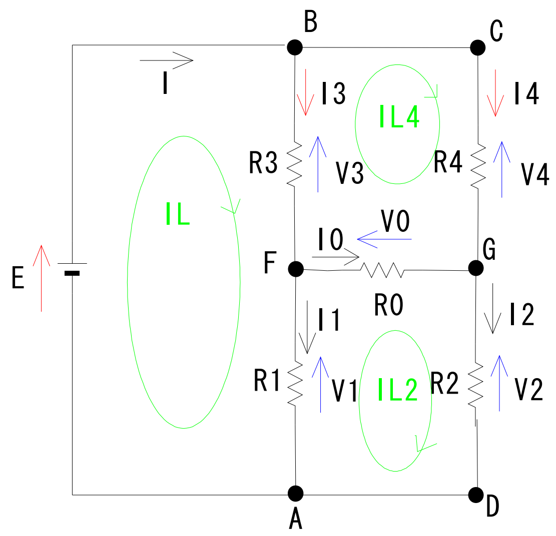

図17

素子の電流をループ電流で表す。

$I=I_L$, $I_1=I_L-I_{L2}$, $I_2=I_{L2}$, $I_3=I_L-I_{L4}$, $I_4=I_{L4}$, $I_0=I_{L2}-I_{L4}$

設定したループ電流に沿ってキルヒホッフの電圧則を適用する。

IL: $0=E-V_3-V_1=E-R_3(I_L-I_{L4})-R_1(I_L-I_{L2})=-(R_1+R_3)I_L+R_1I_{L2}+R_3I_{L4}+E$

IL2: $0=V_1-V_0-V_2=R_1(I_L-I_{L2})-R_0(I_{L2}-I_{L4})-R_2I_{L2}=R_1I_L-(R_0+R_1+R_2)I_{L2}+R_0I_{L4}$

IL4: $0=V_3-V_4+V_0=R_3(I_L-I_{L4})-R_4I_{L4}+R_0(I_{L2}-I_{L4})=R_3I_L+R_0I_{L2}-(R_0+R_3+R_4)I_{L4}$

書き直せば、

$$(R_1+R_3)I_L-R_1I_{L2}-R_3I_{L4}=E$$
$$-R_1I_L+(R_0+R_1+R_2)I_{L2}-R_0I_{L4}=0$$
$$-R_3I_L-R_0I_{L2}+(R_0+R_3+R_4)I_{L4}=0$$

I_L, I_{L2}, I_{L4} に関する連立一次方程式を解けば、電流が得られる。

書き直して行列であらわせば、

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_0+R_1+R_2 & -R_0 \\ -R_3 & -R_0 & R_0+R_3+R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_0+R_1+R_2 & -R_0 \\ -R_3 & -R_0 & R_0+R_3+R_4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

中部大学 電気システム工学科 後藤 英雄

$$\begin{pmatrix} I_L \\ I_{L2} \\ I_{L4} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} (R_0+R_1+R_2)(R_0+R_3+R_4)-R_0^2 & R_1(R_0+R_3+R_4)+R_0R_3 & R_3(R_0+R_1+R_2)+R_0R_1 \\ R_1(R_0+R_3+R_4)+R_0R_3 & (R_1+R_3)(R_0+R_3+R_4)-R_3^2 & R_0(R_1+R_3)+R_1R_3 \\ R_3(R_0+R_1+R_2)+R_0R_1 & R_0(R_1+R_3)+R_1R_3 & (R_1+R_3)(R_0+R_1+R_2)-R_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_0+R_1+R_2 & -R_0 \\ -R_3 & -R_0 & R_0+R_3+R_4 \end{vmatrix}}$$

成分毎に表せば、

$$I_L = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_0(R_1+R_2+R_3+R_4)}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E$$

$$I_{L2} = \frac{R_1(R_0+R_3+R_4)+R_0R_3}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E$$

$$I_{L4} = \frac{R_3(R_0+R_1+R_2)+R_0R_1}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E$$

最初の式に代入して、

$$I = I_L = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_0(R_1+R_2+R_3+R_4)}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

$$I_1 = I_L - I_{L2} = \frac{R_2(R_3+R_4)+R_0(R_2+R_4)}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

$$I_2 = I_{L2} = \frac{R_1(R_0+R_3+R_4)+R_0R_3}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

$$I_3 = I_L - I_{L4} = \frac{(R_1+R_2)R_4+R_0(R_2+R_4)}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

$$I_4 = I_{L4} = \frac{R_3(R_0+R_1+R_2)+R_0R_1}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

$$I_0 = I_{L2} - I_{L4} = \frac{R_1R_4-R_2R_3}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_0(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_4+R_4R_1)}E \quad [\mathrm{A}]$$

i 番目の抵抗で消費される電力 P_i は、上で得た電流によって次のように表される。

$P_i = R_i I_i^2$ [W]（i=0,1,2,3,4）